

部別	班別	科目	試別	考試日期	考試時間	命題者	應考人數
■日間部 ■進修部	工學院 半導體學院	高斯獎數學競賽	期中	111.3.23 1:00	70 分鐘	數學組	人

班級：

學號：

姓名：

1. COVID-19 疫情嚴重，常常需要使用 75%酒精消毒手部，但是藥房只有賣 95%酒精，所以必須買回來加水稀釋。小明買了 95% 酒精，其總體積為  $W$  ( 內含酒精之體積為  $\frac{95}{100} W$  )，想要加入水量  $X$ ，稀釋成 75%酒精。試求  $W : X = ?$

[解答]：  $W : X = 15 : 4.$

解：  $W =$  酒精與水總體積(95% 酒精)，  $\frac{95}{100} W =$  內含酒精之體積，  $X =$  欲加入水量

$$\frac{\frac{95}{100} W}{X+W} = \frac{75}{100}$$

$$\frac{95}{100} W = \frac{75}{100} (X+W)$$

$$\frac{20}{100} W = \frac{75}{100} X$$

$$W : X = \frac{75}{100} : \frac{20}{100} = 15 : 4.$$

2. 學生問老師幾歲，老師說“當我像你這麼大時，你 4 歲。當你像我這麼大時，我已經 34 歲了”，請問老師今年幾歲？

[解答]：  $\boxed{\text{老師今年 24 歲}}$ .

解：解法(一) 設老師年齡為  $T$ ，學生年齡為  $S$ ，

當老師像學生這麼大時，即時間倒退 “ $T - S$ ”，此時學生 4 歲

$$\text{即 } S - (T - S) = 4.$$

當學生像老師這麼大時，即時間前進 “ $T - S$ ”，此時老師 34 歲

$$\text{即 } T + (T - S) = 34.$$

$$\begin{cases} 2S - T = 4 \\ 2T - S = 34 \end{cases}, \text{ 得 } S = 14, T = 24.$$

因此，老師今年 24 歲。

解法(二) 設師生年齡差為  $d$ 。

當老師像學生這麼大時，即時間倒退 “年齡差”，此時學生 4 歲

可知老師今年的年齡是 (2 倍年齡差 + 4 =  $2d + 4$ ) 歲。

當學生像老師這麼大時，即時間前進 “年齡差”，此時老師 34 歲。

可見 3 倍年齡差 + 4 =  $3d + 4 = 34$  歲

得  $d = 10$ 。

因此，老師今年  $2d + 4 = 24$  歲。

3. 有一籃蘋果，甲取走一半少一個，乙接著取走剩下的一半多一個，丙再取走剩下的一半，最後籃子裡還剩下三個蘋果，請問這籃蘋果原來有多少個？

[解答]：這籃蘋果有 26 個。

解： 設一籃有  $x$  個蘋果

$$\text{甲} = \frac{x}{2} - 1$$

$$\text{乙} = \frac{1}{2} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] + 1$$

$$x - \text{甲} - \text{乙} = x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) - \left\{ \frac{1}{2} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] + 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] - 1$$

$$\text{丙} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] - 1 \right\} = \frac{1}{4} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] - \frac{1}{2}$$

$$x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) - \left\{ \frac{1}{2} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] + 1 \right\} - \left\{ \frac{1}{4} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] - \frac{1}{2} \right\} = 3$$

$$\frac{1}{4} \left[ x - \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \right] - 1 + \frac{1}{2} = 3$$

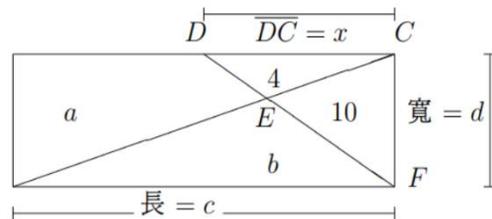
$$\frac{1}{4} \left( \frac{x}{2} + 1 \right) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{x}{2} + 1 = 14$$

$$x = 26.$$

4. 如右圖，長方形長為  $c$ ，寬為  $d$ 。將此長方形分成四個區域，其中兩個區域面積分別為 4 與 10，求另外兩塊區域面積  $a = ?$   $b = ?$

(提示：假設  $\overline{DC} = x$ )



[解答]：  $a = 31$ ，  $b = 25$

解： 設長方形的長為  $c$ ，寬為  $d$ ，  $DC = x$ ，

$$\text{則 } xd = 28, \quad x = \frac{28}{d}.$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{4}{10}$$

$$\therefore \frac{28}{dc} = \frac{4}{10}, \quad dc = 70$$

$$a = 35 - 4 = 31$$

$$b = 35 - 10 = 25.$$

5. 大草地面積是小草地面積的三倍，由一組工人割草。早上全部工人在大草地工作，下午三分之二工人在大草地工作，到傍晚完成工作，另三分之一工人去小草地，到傍晚剩下一部份第二天由一人工作一天完成。請問這組工人有幾人？(提示：設工人有  $x$  人，且一人工作半天的量是 1 單位)

[解答]：工人有 9 人。

解： 設工人有  $x$  人，且一人工作半天的量是 1 單位，

$$\text{則 } x + \frac{2}{3}x = \text{大草地的量} , \frac{1}{3}x + 2 = \text{小草地的量}$$

大的草地面積是小的草地的三倍

$$x + \frac{2}{3}x = 3\left(\frac{1}{3}x + 2\right) , x = 9.$$

6. 某公司有 36 位師傅總共要帶 53 名徒弟，所以每位師傅必須帶 1 名或 2 名或 3 名徒弟。其中帶 1 名徒弟的師傅所帶徒弟總數量是其他師傅(帶 2 名或帶 3 名徒弟)帶徒弟總數量的兩倍。試問帶 2 名徒弟的師傅有幾位？

[解答]：帶 2 名徒弟的師傅 7 位。

解： 設其他師傅數目有  $x$  人，則  $2x + x = 36$ ， $x = 12$ 。

帶 1 名徒弟的師傅有 24 位，共帶 24 名徒弟，

其他師傅，帶 2 或 3 名徒弟，有 12 位，共帶  $53 - 24 = 29$  名徒弟。

令  $T_2 =$  帶 2 名徒弟的師傅數目， $T_3 =$  帶 3 名徒弟的師傅數目

則  $2T_2$ 、 $3T_3$  為對應的徒弟數目，列表如下：

$T_2$	$T_3$	$2T_2$	$3T_3$	$2T_2 + 3T_3$
0	12	0	36	36
1	11	2	33	35
2	10	4	30	34
3	9	6	27	33
4	8	8	24	32
5	7	10	21	31
6	6	12	18	30
7	5	14	15	29
8	4	16	12	28
9	3	18	9	27
10	2	20	6	26
11	1	22	3	25
12	0	24	0	24

得  $T_2 = 7, T_3 = 5$ ，帶 2 名徒弟的師傅 7 位

7. 明新電信公司門號專案，如右表所示，在為期 24 個月的約期下，手機搭配月租費的方案共有方案 A 及方案 B 兩案，而該公司每月計算電信費用方式是從用戶每月月租費和月通話費二者中取金額較大的當作電信費用。

24 個月	專案 A	專案 B
月租費	200	700
手機價	8000	5000

已知小英的月通話費是介於 200 元與 700 元之間的整數，請問當小英的月通話費至少為多少元時，選擇專案 2 的花費較少。

[解答]: 月通話費至少 = 575 元, 則專案 2 總花費較少.

解：設小英月通話費為滿足  $200 \leq h_i \leq 700$  ( $i = 1, \dots, 24$ ) 的整數，單位為元

令  $\min\{h_1, \dots, h_{24}\} = h$

(a) 月通話費  $200 \leq h_i$  ( $i = 1, \dots, 24$ )，則在第 24 個月末累積總量  $A_1(24) \geq 8000 + h \cdot 24$ .

(b) 月通話費  $h_i \leq 700$  ( $i = 1, \dots, 24$ )，則在第 24 個月末累積總量  $A_2(24) = 5000 + 700 \cdot 24$ .

欲  $A_1(24) \geq A_2(24)$ ，只要  $8000 + h \cdot 24 \geq 5000 + 700 \cdot 24$

解此不等式  $h \cdot 24 \geq 700 \cdot 24 - (8000 - 5000)$

$$h \geq \frac{700 \cdot 24 - (8000 - 5000)}{24} = 700 - \frac{8000 - 5000}{24} = 575.$$

所以，月通話費至少 575 元，則專案 2 總花費較少。

8. 西方曆法一星期有 7 天，東方曆法則以天干地支表來計日，60 天為一週期。已知西元 2022 年 3 月 23 日是乙亥日(如右圖號碼是 12)，則西元 1922 年 3 月 23 日是甚麼日(填號碼即可)？

[提示：西元年數可被 4 整除，但不被 100 整除且可被 400 整除者是閏年，此時二月就有 29 天；其餘年份為平年，其二月只有 28 天]

天干地支表									
1 甲子	2 乙丑	3 丙寅	4 丁卯	5 戊辰	6 己巳	7 庚午	8 辛未	9 壬申	10 癸酉
11 甲戌	12 乙亥	13 丙子	14 丁丑	15 戊寅	16 己卯	17 庚辰	18 辛巳	19 壬午	20 癸未
21 甲申	22 乙酉	23 丙戌	24 丁亥	25 戊子	26 己丑	27 庚寅	28 辛卯	29 壬辰	30 癸巳
31 甲午	32 乙未	33 丙申	34 丁酉	35 戊戌	36 己亥	37 庚子	38 辛丑	39 壬寅	40 癸卯
41 甲辰	42 乙巳	43 丙午	44 丁未	45 戊申	46 己酉	47 庚戌	48 辛亥	49 壬子	50 癸丑
51 甲寅	52 乙卯	53 丙辰	54 丁巳	55 戊午	56 己未	57 庚申	58 辛酉	59 壬戌	60 癸亥

[解答]: 西元 1922 年 3 月 23 日為星期四

解：(a) 西元 2022 年 1 月 1 日到西元 2022 年 3 月 23 日，共有 82 天。

則西元 1 年 1 月 1 日到西元 2022 年 3 月 23 日，共有日數為：

$$\begin{aligned} n_2 &= (2021) \cdot 365 + (2021 \div 4 \text{ 的商}) - (2021 \div 100 \text{ 的商}) + (2021 \div 400 \text{ 的商}) + 82 \\ &= (2021) \cdot 365 + 505 - 20 + 5 + 82. \end{aligned}$$

西元 1922 年 1 月 1 日到西元 1922 年 3 月 22 日，共有 81 天

則西元 1 年 1 月 1 日到西元 1922 年 3 月 22 日，共有日數為

$$\begin{aligned} n_1 &= (1921) \cdot 365 + (1921 \div 4 \text{ 的商}) - (1921 \div 100 \text{ 的商}) + (1921 \div 400 \text{ 的商}) + 119 \\ &= (1921) \cdot 365 + 480 - 19 + 4 + 81. \end{aligned} \quad (b)$$

(b) 西元 1922 年 3 月 23 日到西元 2022 年 3 月 23 日，共有日數為

$$\begin{aligned} n_2 - n_1 &= (2021 - 1921) \cdot 365 + (505 - 480) - (20 - 19) + (5 - 4) + (82 - 81) \\ &= 36526 \div 7 \text{ 的商為 } 5218, \text{ 餘數為 } 0 \end{aligned}$$

因為西元 2022 年 3 月 23 日為星期三，

則往前推 [餘數為 0 為星期四，餘數為 1 為星期三，餘數為 2 為星期二，...] ]

故西元 1922 年 3 月 23 日為星期四。

另解：西元 1 年 1 月 1 日 到西元 1922 年 3 月 23 日, 共有日數為：

$$\begin{aligned}n_0 &= (1921) \cdot 365 + (1921 \div 4 \text{ 的商}) - (1921 \div 100 \text{ 的商}) + (1921 \div 400 \text{ 的商}) + 82 \\ &= (1921) \cdot 365 + 480 - 19 + 4 + 82\end{aligned}$$

西元 1922 年 3 月 24 日到西元 2022 年 3 月 23 日, 共有日數為：

$$\begin{aligned}n_2 - n_0 &= (2021 - 1921) \cdot 365 + (505 - 480) - (20 - 19) + (5 - 4) + (82 - 82) \\ &= 36525 \quad 36525 \div 7 \text{ 的商為 } 5217, \text{ 餘數為 } 6.\end{aligned}$$

因為西元 2022 年 3 月 23 日為星期三，

則往前推[餘數為 0 為星期三，餘數為 1 為星期二。餘數為 2 為星期一，餘數為 3 為星期日, 餘數為 4 為星期六, 餘數為 5 為星期五, 餘數為 6 為星期四]

故 西元 1922 年 3 月 23 日 為星期四